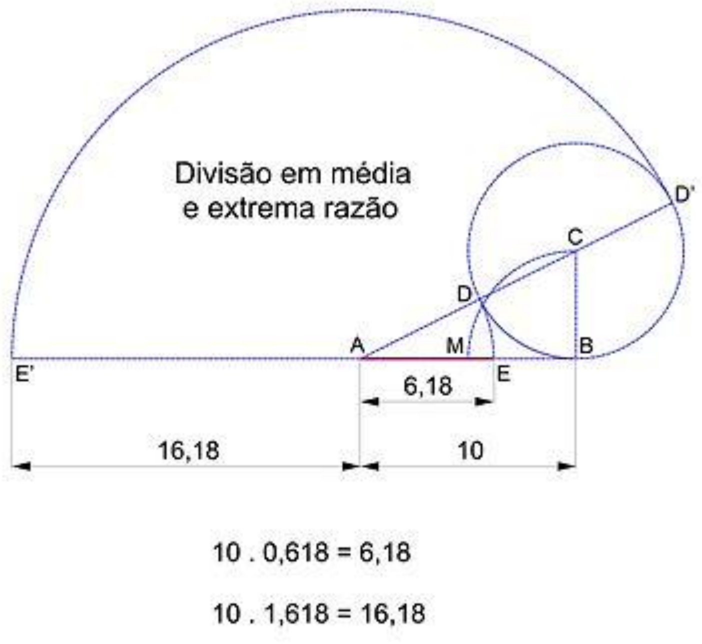
O NUMERO ϕ (PHI)

A proporção áurea, número de ouro, número áureo ou proporção de ouro é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega ϕ(PHI), em homenagem ao escultor Phideas *(Fídias)*, que a teria utilizado para conceber o Parthenon, e com o valor arredondado a três casas decimais de 1,618. Também é chamada de seção áurea (do latim *sectio aurea*), razão áurea, razão de ouro, média e extrema razão *(Euclides)*, divina proporção, divina seção (do latim *sectio divina*), proporção em extrema razão, divisão de extrema razão ou áurea excelência. O número de ouro é ainda frequentemente chamado razão de Phidias.

Desde a Antiguidade, a proporção áurea é usada na arte. É frequente a sua utilização em pinturas renascentistas, como as do mestre Giotto. Este número está envolvido com a natureza do crescimento. *Phi* (não confundir com o número Pi π), como é chamado o número de ouro, pode ser encontrado na proporção dos seres humanos (o tamanho das falanges, ossos dos dedos, por exemplo) e nas colméias, entre inúmeros outros exemplos que envolvem a ordem do crescimento.

Justamente por estar envolvido no crescimento, este número se torna tão frequente. E justamente por haver essa frequência, o número de ouro ganhou um status de "quase mágico", sendo alvo de pesquisadores, artistas e escritores. Apesar desse *status*, o número de ouro é apenas o que é devido aos contextos em que está inserido: está envolvido em crescimentos biológicos, por exemplo. O fato de ser encontrado através de desenvolvimento matemático é que o torna fascinante.

Cálculo do número



Divisão em média e extrema razão. A partir de um segmento de 10 unidades, determina-se a sua seção áurea multiplicando-o por 0,618 (média). Para encontrar-se um segmento maior, em extrema razão, deve-se multiplicar as dez unidades iniciais por 1,618.

Definição algébrica

A **razão áurea** é definida algebricamente como:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi\,.$$

A equação da direita mostra que $a = b\phi$, o que pode ser substituído na parte esquerda, resultando em:

$$\frac{b\phi + b}{b\phi} = \frac{b\phi}{b}\,.$$ Cancelando *b* em ambos os lados, temos:

$$\frac{\phi+1}{\phi} = \phi.$$ Multiplicando ambos os lados por ϕ, resulta:

$$\phi + 1 = \phi^2.$$

Finalmente, subtraindo ϕ^2 de ambos os membros da equação e multiplicando todas as parcelas por -1, encontramos:

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$, que é uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a = 1,\ b = -1$ e $c = -1$.

Agora, basta resolver essa equação quadrática. Pela Fórmula de Bháskara:

$$\phi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

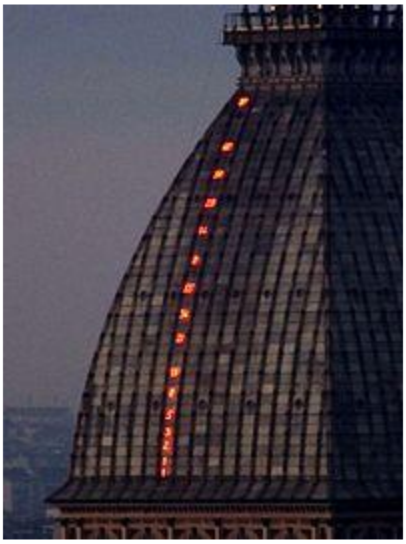
$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

A única solução positiva dessa equação quadrática é a seguinte:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875,$$ que é o número ϕ.

Sequência de Fibonacci



Representação da sequência de Fibonacci na Mole Antonelliana em Turim, Itália.

Como é um número extraído da sequência de Fibonacci, o número áureo representa diretamente uma constante de crescimento.

O número áureo é aproximado pela divisão do enésimo termo da Série de Fibonacci (0, 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,..., na qual cada número é a soma dos dois números imediatamente anteriores na própria série) pelo termo anterior. Essa divisão converge para o número áureo conforme tomamos cada vez maior. Podemos ver um exemplo dessa convergência a seguir, em que a série de Fibonacci está escrita até seu oitavo termo [0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13]:

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{5}{3} = 1,666...$$

$$\frac{8}{5} = 1,6$$

$$\frac{13}{8} = 1,625$$

Série de frações

O número áureo também pode ser encontrado através de frações sucessivas, normalmente representadas com [a,b,c,d,e], o que resulta em:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}}$$

A aproximação do número áureo vem com a quantidade de números 1 em uma representação de Série de Frações. O valor varia em torno do número áureo, sendo maior ou menor alternadamente, mas sempre se aproximando deste.

$$[1,1] = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2.$$
$$[1,1,1] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$
$$[1,1,1,1] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1,666.$$
$$[1,1,1,1,1] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

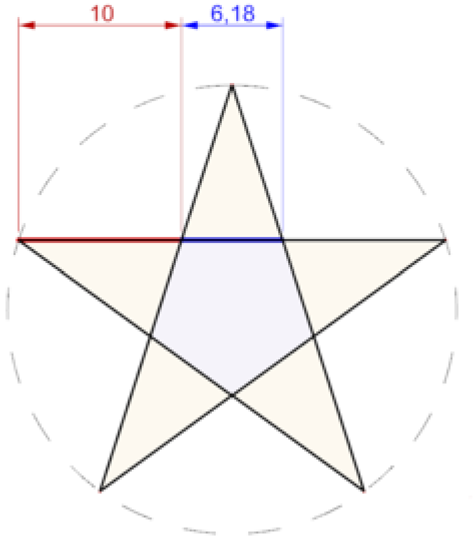
Série de raízes

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}}$$

Proporção áurea na natureza

Figuras geométricas

Um *decágono regular*, inscrito numa circunferência, tem os lados em proporção áurea com o raio da circunferência.



Segmentos do pentagrama estão na proporção áurea, como mostra a figura. O pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea.

Um *pentagrama regular* é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, também está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea. A razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual a quarta potência da razão áurea.

Chamando os vértices de um pentagrama de A, B, C, D e E, o triângulo isósceles formado por A, C e D tem seus lados em relação dourada com a base, e o triângulo isósceles A, B e C tem sua base em relação dourada com os lados.

Quando Pitágoras descobriu que as proporções no pentagrama eram a proporção áurea, tornou esse símbolo estrelado como a representação da Irmandade Pitagórica. Esse era um dos motivos que levava Pitágoras a dizer que "tudo é número", ou seja, que a natureza segue padrões matemáticos.

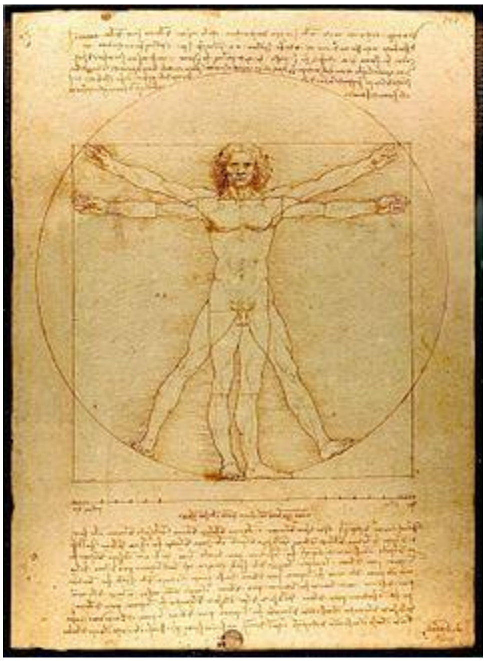
Vegetais

- Semente de girassol – A proporção em que aumenta o diâmetro das espirais de sementes de um girassol é a razão áurea.
- *Achillea ptarmica* – Razão do crescimento de seus galhos.
- Folhas das Árvores – A proporção em que diminuem as folhas de uma árvore à medida que subimos de altura.

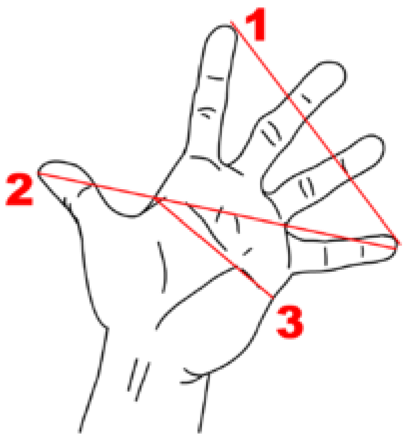
Animais

- ***População de abelhas*** – A proporção entre abelhas fêmeas e machos em qualquer colméia.
- ***Concha do caramujo Nautilus*** – A proporção em que cresce o raio do interior da concha desta espécie de caramujo. Este molusco bombeia gás para dentro de sua concha repleta de câmaras para poder regular a profundidade de sua flutuação. Obs.: até hoje não se encontrou nenhum caramujo Nautilus que comprove essa afirmação amplamente difundida! (vide "O número de Ouro", Michel Spira, palestra OBMEP, 2006; Colaboração: Prof. Francisco Teodorico Pires de Souza)
- Outros – ***phi*** estão também nas escamas de peixes, presas de elefantes, crescimento de plantas.

Corpo humano



O Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci. As ideias de proporção e simetria aplicadas à concepção da beleza humana.



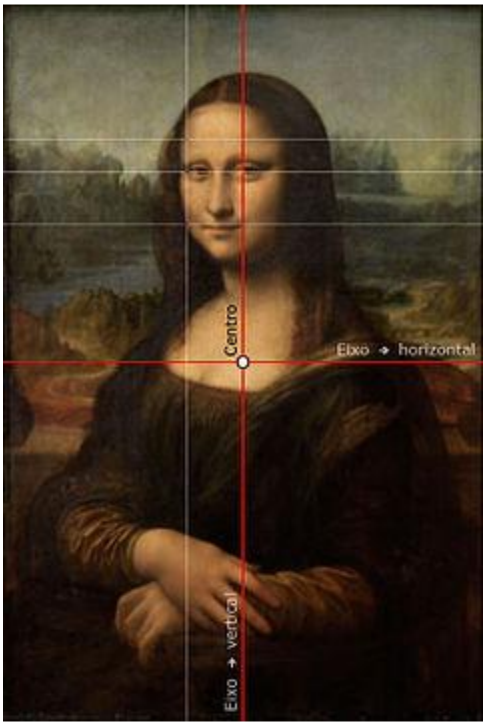
Proporções áureas em uma mão.

- A altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão.
- A altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça.
- A medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax.
- A medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo.
- O tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta.
- A medida da dobra central até a ponta dividido e da segunda dobra até a ponta.
- Dimensão do útero em mulheres jovens (16 e 20 anos), segundo o pesquisador Jasper Vergtus, da Universidade de Leuven.

Aplicações

O homem sempre tentou alcançar a perfeição, seja nas pinturas, seja nos projetos arquitetônicos, seja até mesmo na música.

Arte



As linhas vermelhas representam os eixos vertical e horizontal. As linhas brancas são divisões áureas. Os olhos e a boca estão posicionados nessa estrutura geométrica.

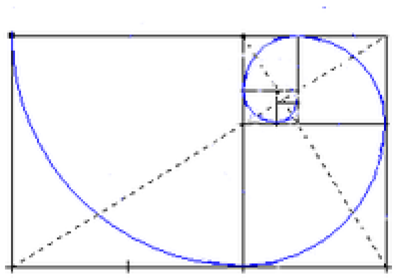
A proporção áurea foi muito usada na arte, em obras como O Nascimento de Vênus, quadro de Botticelli, em que Afrodite está na proporção áurea. Essa proporção estaria ali aplicada pelo motivo de o autor representar a perfeição da beleza.

Em O Sacramento da Última Ceia, de Salvador Dalí, as dimensões do quadro (aproximadamente 270 cm × 167 cm) estão numa Razão Áurea entre si. Na história da arte renascentista, a perfeição da beleza em quadros foi bastante explorada com base nessa constante. Vários pintores e escultores lançaram mão das possibilidades que a proporção lhes dava para retratar a realidade com mais perfeição.

A Mona Lisa, de Leonardo da Vinci, tem a proporção áurea nas relações entre o tronco e a cabeça, bem como nos elementos da face, mas isso é uma característica inerente ao ser humano e tais proporções podem ser encontradas na maioria das pinturas em que a anatomia tenha sido respeitada.

Medições feitas por computador mostraram que os olhos de Mona Lisa estão situados em subdivisões áureas da tela.

Retângulo dourado



Proporção áurea em retângulos.

Alusão à seção áurea na estação Saldanha do metrô de Lisboa.

Em geometria, o **retângulo de ouro** surge do processo de divisão em média e extrema razão, de Euclides. Ele é assim chamado porque ao dividir-se a base desse retângulo pela sua altura, obtêm-se o número de ouro **1,618**.

Música

O número de ouro está presente em diversas obras de compositores clássicos, sendo o exemplo mais notável a famosa sinfonia n.º 5, de Ludwig van Beethoven. O compositor húngaro Béla Bartók também se utilizou desta relação de proporcionalidade constantemente em sua obra, assim como o fez o francês Claude Debussy em diversas de suas sonatas.

No jazz há músicos que usam os números da série Fibonacci na divisão rítmica e dos compassos (Golden Mean).

Literatura

No livro "O Número de Ouro", Matila Ghyka demonstrou a existência da proporção áurea em textos escritos por Victor Hugo, Shakespeare, Paul Valéry, *Pierre Louys*, entre outros. Na pesquisa Ghyka relacionou as estrofes de acordo com o ritmo da leitura, o que ele define como *ritmo prosódico*.

Cinema

O diretor russo *Sergei Eisenstein* se utilizou do número ϕ no filme *O Encouraçado Potemkin* para marcar os inícios de cenas importantes da trama, medindo a razão pelo tamanho das fitas de película.